数理解析研究所講究録
526巻 1984年 136-148

カークマン問題とその応用

藤原 良 (Ryoh Fuji-Hara)

University of Waterloo Dept. of Combinatorics and Optimization

T.G.Room は1955年 "A new tipe of magic square" Math Gazett 39 の中で，次のような問題を提起した。

A を次の条件を満すArray とする。

(a_1) A の各cell は空又は n-set N の 2-subset である。

(a_2) N の全ての元は A の各行，各列に必ず1回現われる。

(a_3) N の全ての 2-subset は必ず1回 A の中に現われる。

このような Array A を <u>Room Square</u> と呼ぶ。(Mendelsohn and Wolke) そして RS(n) と書く。上の定義より次のことは自明である。

(b_1) n は偶数。

(b_2) A の size は $n-1$.

<u>Example 1</u> RS(8)

∞ 0	2 6	4 5		1 3		
	∞ 1	3 0	5 6		2 4	
		∞ 2	4 1	6 0		3 5
4 6			∞ 3	5 2	0 1	
	5 0			∞ 4	6 3	1 2
2 3		6 1			∞ 5	0 4
1 5	3 4		0 2			∞ 6

ROOM SQUARE の存在・非存在に関しては MULLIN and WALLIS 1975 で解かれた。

THEOREM 1 (MULLIN and WALLIS)

A ROOM SQUARE OF ORDER n EXISTS IF and ONLY IF $n \equiv 0 \pmod 2$, $n \neq 4, 6$.

実はこの問題は，ROOM より 100年ほど前，1968年 A. CAYLEY によって提起されていたのである。ところが，最近 A. ROZA と C st. J. A. NASH-WILLIAMS の指摘により，次のことがわかった： CAYLEY より 18年前，1850年，T.P. KIRKMAN による "NOTE ON AN UNANSWERED PRIZE QUESTION" THE CAMBRIDGE AND DOBLIN MATH. JOURNAL V の中で同一問題が論議されていたのである。そこで，KIRKMAN の功積にちなんで， ROOM SQUARE を含む，以下のような

より一般的な ARRAY A を <u>KIRKMAN SQUARE</u> と呼ぶ (ROZA, VANSTONE), そして $KS_k(v)$ と書く.

(C1) A の各 CELL は, 空又は v-set V の k-subset,

(C2) V の全ての元は, A の各行, 各列に必ず1回現われる,

(C3) V の全ての 2-subset は A の CELL 中に必ず1回現われる。

(NOTE: これを GENERALIZED ROOM SQUARE と呼ぶ人もいる.)

CELL に現われる k-subset を BLOCK とすると, これは明らかに $(v, k, 1)$-BIBD となる。そして, そのデザインを <u>UNDERLYING DESIGN</u> と呼ぶ。

デザイン上の用語を用いて, KIRKMAN SQUARE を定義すると, 次のようになる。 $D=(V, \mathcal{B})$ を $(v, k, 1)$-BIBD とする, V は v-set (VARIETIES), $\mathcal{B}$ は BLOCK の集合。 <u>RESOLUTION</u> とは次を満すような $\mathcal{B}$ の分割 $R_1, R_2, \cdots, R_r$, $r=(v-1)/(k-1)$, である:

V のどの元も必ず1回, 各 R_i (CLASS), $1 \leq i \leq r$, に現われる。

$\mathbb{R}$, $\mathbb{S}$ を2つの D の RESOLUTION とする. そのときもし

$$|R \cap S| \leq 1 \quad, R \in \mathbb{R}, S \in \mathbb{S}$$

ならば, RESOLUTIONS $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}$ は <u>直交</u> するという。

直交する2つのRESOLUTIONをもつデザインDを<u>DOUBLY RESOLVABLE KIRKMAN SYSTEM</u>と呼ぶ.

<u>EXAMPLE 2</u> $KS_3(27)$

	25 19 7	27 12 24	4 11 22	3 16 17			26 1 13	2 10 18	23 20 21	8 5 6	9 14 15	
26 2 14		25 20 8	27 13 17	5 12 23	4 9 18			3 11 19		24 21 22	1 6 7	10 15 16
	26 3 15		25 21 1	27 14 18	6 13 24	5 10 19		4 12 20	11 16 9		17 22 23	2 7 8
		26 4 16		25 22 2	27 15 19	7 14 17	6 11 20	5 13 21	3 8 1	12 9 10		18 23 24
12 21 7			26 5 9		25 23 3	27 16 20	8 15 18	6 14 22	19 24 17	4 1 2	13 10 11	
1 16 19	8 13 22			26 6 10		25 24 4	27 9 21	7 15 23		20 17 18	5 2 3	14 11 12
27 10 22	2 9 20	1 14 23			26 7 11		25 17 5	8 16 24	15 12 13		21 18 19	6 3 4
25 18 6	27 11 23	3 10 21	2 15 24			26 8 12		1 9 17	7 4 5	16 13 14		22 19 20
8 11 17	1 12 18	2 13 19	3 14 20	4 15 21	5 16 22	6 9 23	7 10 24	27 25 26				
	5 14 24	22 7 9	6 12 19		1 10 20	18 3 13	2 16 23			25 11 15	27 8 4	26 17 21
3 9 24		6 15 17	23 8 10	7 13 20		2 11 21	19 4 14		26 18 22		25 16 12	27 1 5
20 5 15	4 10 17		7 16 18	24 1 11	8 14 21		3 12 22		27 2 6	26 19 23		25 9 13
4 13 23	21 6 16	5 11 18		8 9 19	17 2 12	1 15 22			25 10 14	27 3 7	26 24 20	

今までに,知られている $KS_k(v)$ を年代順に列挙すると,次のようになる.

1975 MULLIN and WALLIS $KS_2(2n)$ $n \geq 4$

1978 MATHON and VANSTONE $KS_q(q^3)$, q a prime power

1979 Dickey and Fuji-Hara $KS_q(q^3)$, q a prime power

1980 MATHON and Vanstone $KS_q(q^n)$ $n = 2^i - 1$

$i \geq 2$, q a prime power. (USING BEUTELSPACHER's RESULT 1974, GEOMETRIAE DEDICATA 3 35–40)

1980b FUJI-HARA and VANSTONE $KS_q(q^n)$ $n = 2^i$

$i \geq 2$, q a prime power.

1981 FUJI-HARA and VANSTONE $KS_q(q^n)$

$n \geq 3$, q a prime power.

この他に，いくつかの RECURSIVE CONSTRUCTIONS があり（FUJI-HARA and VANSTONE 1980c）それらにより，次の定理がなりたつ．

THEOREM 2 (FUJI-HARA and VANSTONE 1980c)

FOR v SUFFICIENTLY LARGE AND $v \equiv 1$ or 4 (mod 12), THERE EXISTS A $KS_3(2v+1)$

THEOREM 3 (FUJI-HARA and VANSTONE 1980c)

LET q be A PRIME POWER ($q \geq 3$). THER EXISTS A CONSTANT C SUCH THAT FOR ANY INTEGER $v > C$ AND $v \equiv 1$ OR $q+1$ (mod $q(q+1)$), THER EXISTS A $KS_q((q+1)v+1)$.

K.R. SHAH (1970) は ROOM SQUARE の実験計画法への応用を提案している。 ROOM SQUARE RS(n) の行を BLOCK B_i, 列を VARIETY α_i, として SYMBOL を TREATMENT β_i として、次のような分割実験モデルを考えている.

$$x_{tij} = \mu + B_t + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ti} + \varepsilon_{tij}$$

このとき, 各効果 B_t, α_i, β_j, $1 \le t, i \le n-1$, $1 \le j \le n$ の推定をするのに, RS(n) が次のような性質を持つと便利である:

(d) 次のようにしてできる 0-1 MATRIX M が SYMETRIC BIBD の INCIDENCE METRIC になる

$$M[m_{ij}] = \begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{if } (i,j)\text{ cell of RS}(n) \text{ is } \phi \\ m_{ij} = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このような性質をもつ KIRKMAN SQUARE を <u>BLANK BALANCED KIRKMAN SQUARE</u> と呼ぶ. (BBKS$_k$(v) と書く) BBKS の存在に関しては, MULLIN and NEMETH 1975 や FUJI-HARA and VANSTONE 1982a で研究されている。

カークマン問題というと, カークマンの女学生問題 (RESOLVABLE (v, 3, 1)-BIBD) というのが有名である。

この問題も，やはり19世紀に出されたが，解かれたのは最近である（RAY-CHAUDHURI and WILSON 1971）。上に述べた BBKS は カークマンの女学生問題とも密接な関係がある。EXAMPLE 1 の RS(8) を考えてみよう。各列に a,b,c,d,e,f,g とラベルする。すると 空CELL からできる SBIBD は：

dfg　aeg　abf　bcg　acd　bde　cef

次に，各々のペアに その列記号を付加えて，新しいBLOCKを作る.

∞0a	∞1b	∞2b	46a	50b	23a	15a
26b	30c	41d	∞3d	∞4e	60c	34b
45c	56d	60e	52e	63f	∞5f	03d
13e	24f	35g	01f	12g	04g	∞6g

すると，これはカークマンの15女学生問題の解となっている。すなわち RESOLVABLE (15, 3, 1)-BIBD が構成される。一般に次のような系列が構成可能である.

THEOREM (MULLIN and VANSTONE 1980)

THERE EXISTS A ROOM SQUARE RS(n) FOR $n \equiv 0$ (mod 6) and n a prime power, such that a RESOLVABLE ($2n-1$, 3, 1)-BIBD is CONSTRUCTABLE FROM RS(n).

次に BIBD を以下のように一般化しよう．$\mathcal{V}$ を v-set，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{V}$ の subset (block) の COLLECTION とする．
そのとき，次の性質を満す SYSTEM $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ を <u>(r,λ)-DESIGN</u> と呼ぶ：

(e_1) $\mathcal{V}$ の各元は必ず r 個の block に含まれる．

(e_2) 全ての $\mathcal{V}$ の 2-subset は必ず λ 個の block に含まれる．

そして，もし (r,λ)-DESIGN が直交する2つの Resolutions をもつとき，D を <u>DOUBLY RESOLVABLE (r,λ)-DESIGN</u> と呼ぶ（ DR(r,λ)-design と書く）

block size が一定でない，DR(r,λ)-design は，以下のようなのが知られている．

1978 MATHON and VANSTONE DR$(q^2+q+1, 1)$-design
q a prime power，$k = q$ or $q+1$.

1979 DICKEY and Fuji-Hara，DR$(q^2+q+1, 1)$-design
q a prime power $k = q$ or u $1 \le u \le q+1$.

1981 Fuji-Hara and Vanstone，DR$((q^n-1)/(q-1), 1)$-design，q a prime power，n odd，$\ne 5$
$k = q$ or u，$1 \le u \le q+1$.

この DR(r,λ)-design の問題は次のような問題と同値である（DEZA, MULLIN and VANSTONE 1976）

A を次の条件を満す $v \times r$ Array とする．

(i) A の各行は r-symbol R の PERMUTATION である.

(ii) A の異る任意の2行に，必ず入個の同一 symbol を持つ列がある。

このような $v \times r$ Array を <u>EQUIDISTANT PERMUTATION ARRAY</u> と呼ぶ（EPA$(r, \lambda ; v)$ と書く）。

$R(r)$ を EPA$(r, 1; v)$ が存在する最大 v とすると，次のような bound が知られている：

$$2r-4 \leq R(r) \leq r^2-4r \quad , r \geq 5$$

Lower bound は HEINRICH and VAN REES 1978, Upper bound は MULLIN and NEMETH 1978 による。 MATHON and VANSTONE の DR$(q^2+q+1, 1)$-design は次のような lower bound を与える

$$R(q^2+q+1) \geq q^3+q^2 \quad , \quad q \text{ a prime power.}$$

これは $R(r)$ が r に関して non-linear で増える最初の例であり，現在のところ $R(r)/r$ の値で最大である。これは，FUJI-HARA and VANSTONE 1981 によって次のように拡大された：

$$R((q^{n}-1)/(q-1)) \geq q^{n}+q^{n-1}$$

q a prime power, n any odd integer $n \geq 3$, $n \neq 5$.

次に、又 KIRKMAN SQUARE にもどって、次のような問題が、Howell (1955) によって提起された。

(g_1) $KS_k(v)$ の各行について、各 non-empty cell から各々1個づつ元を取り出し、k個の互いに disjoint な (v/k)-subsets を作る。

(g_2) (g_1) で作られた、全部で $k\cdot(v-1)/(k-1)$ 個の (v/k)-subsets (blocks) は V 上の BIBD となる。

(g_1) (g_2) を満す $KS_k(v)$ を <u>BALANCED KIRKMAN SQUARE</u> と呼び、$BKS_k(v)$ と書く。

<u>EXAMPLE 3</u> (EXAMPLE 1 の RS(8) を用いて)

∞ 2 4 1	0 6 5 3
∞ 3 5 2	1 0 6 4
∞ 4 6 3	2 1 0 5
∞ 5 0 4	3 2 1 6
∞ 6 1 5	4 3 2 0
∞ 0 2 6	5 4 3 1
∞ 1 3 0	6 5 4 2

この問題に関しては，次のようなのが知られている．

1973　SCHELLENBERG　$BKS_2(2(P+1))$, when $P=2^m k+1$ is a prime power, $m \geq 1$, $k \geq 1$ odd

1982　HWANG　$BKS_2(8k+6)$, $k \geq 1$ and $8k+5$ a prime power

1982　DING ZHU DU and HWANG, $BSK_2(2(2^m k+1))$ $2^m k+1$ a prime power, k odd, $k > 9 \cdot 2^{3m}$

1982$_b$　FUJI-HARA and Vanstone　$BKS_2(2^{2n+1})$, $n \geq 1$, $BKS_q(q^n)$, q a prime power $n=[(2^i-1)^k-1]\cdot[2^j-1]+1$, $i,j \geq 2$, $k \geq 1$

その他，(C_3)の"必ず1回"を"高々1回"におきかえた Howell Design，Kirkman Squareを3次元に拡張した Kirkman Cube 等の design も研究されている．(D.R. STINSON 1982, ROZA and Vanstone 1981, Fuji-Hara 1982)

References

Cayley,A

1863 On a tactical theorem relating to the triads of fifteen things, London Edinburgh and Dublin Philos. Magazine and J. Sci. (4) 25, 59-61 (Collected Math. Papers V 95-97)

Deza,M.,Mullin,R.C. and Vanstone,S.A.

1976 Room squares and equidistant permutation arrays, Ars Combinatoria 2

Dickey,L.J. and Fuji-Hara,R.

1979 A geometrical construction of doubly resolvable $(n^2+n+1,1)$-designs Ars Combinatoria 8 ,3-12

Ding Zhu Du and Hwang,F.K.

1982 Symmetric skew balanced structurs and complete balanced howell rotations (priprint)

Fuji-Hara,R

1982 Baer subplanes in a finite projective plane and Kirkman cubes Combinatorial conference at Univ. of Waterloo (submitted)

Fuji-Hara,R and Vanstone,S.A.

1980a On automorphisms of doubly resolvable designs, Combinatorial Mathmatics VII, Springer-Verlag Lecture Note 829

1980b Orthogonal resolutions of lines in AG(n,q), Research report, RRCO 80-28 Univ. of Waterloo (to appear in Discrete Mathmatics)

1980c On the spectrum of doubly resolvable Kirkman system, Congressus Numerantium 28, 399-407

1981 The existence of orthogonal resolution of lines of AG(n,q) (submitted)

1982a Skew resolutions and packings with applications to statistics Geometry conference, Rome (submitted)

1982b A geometrical construction of balanced Kirkman squares (in preparation)

Heinrich,K. and van Rees,G.H.J.

1978 Some constructions for equidistant permutation arrays of index one, Utilitas Math. 13 193-200

Hwang,F.K.

1982 Complete balanced Howell Rotations for 8k+5 teams (preprint)

Kirkman,T.P.

1850 Note on an unanswered prize question, The Cambridge and Doblin Math. Journal V

Mathon,R. and Vanstone,S.A.

1978 On the existence of doubly resolvableKirkman systems and equidistant permutation arrays (preprint) (Discrete Math 30, 1980)

Mathon,R. and Vanstone,S.A.
1980 On the existence of orthogonally resolvable Kirkman systems Congressus Numerantium 29

Mullin,R.C. and Nemeth,E.
1969 An existence theorem for Room square, Canadian Math, Bull, 12, No. 4
1978 An improved upper bound for equidistant permutation arrays, Utilitas Math. 13 77-86

Mullin,R.C. and Wallis,W.D.
1975 The existence of Room squares, Aequatione Math. 13 1-7

Mullin,R.C. and Vanstone,S.A.
1980 Steiner systems and Room squares, Annals of Discrete Math. 7 95-104

Ray-Chauduri,D.K. and Wilson,R.M.
1971 Solutionof Kirkman's schoolgirl problem, Proc. Symp. Pure Math. 19 AMS Providence RI 187-203

Room,T.G.
1955 A new type of magic square, Math. Gazette 39

Roza,A. and Vanstone,S.A.
1981 Kirkman cubes, Annals of Discrete Math. (to appear)

Shah,K.R.
1970 Analysis of Room square design, The annals of Mathmatical Statistics 42 No.2, 743-745
1982 Optimality of Generalized Room squares (preprint) (WITH S. GHOSH)

Schellenberg,P.J.
1973 On balanced Room squares and complete balanced Howell rotations, Aequationes Math. 9 75-90

Stinson,D.R.
1982 The existence of Howell designs (to appear in J. Combinatorial Th.)